JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 11, 97–109 (1974)

Approximation des Fonctionnelles par des Fonctionnelles d'Évaluation sur des Espaces de Hilbert de Fonctions

MARC DUC-JACQUET

Département de Mathématiques Appliquées, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 38 041 Grenoble cédex, France

Communicated by I. J. Schoenberg

Ce travail est une contribution à un problème formulé de manière précise par S. L. Sobolev en 1962. Nos résultats concernent l'existence de formules optimales pour l'approximation de fonctionnelles sur un espace de Hilbert de fonctions d'une variable réelle. Ils complètent et généralisent les résultats antérieurs. Par ailleurs, le formalisme employé à donné lieu à un développement analogue pour l'approximation optimale de la somme d'une série. On consultera à ce propos les travaux de J. Baranger. En ce qui concerne les fonctions à plusieurs variables, on pourra se reporter aux publications des mathématiciens soviétiques: S. L. Sobolev, V. D. Carusnikov, I. M. Sobol' entre autres.

Toutefois, leurs résultats ne semblent absolument pas recouvrir ceux que nous présentons ici. Enfin notons que nous avons abordé cette étude après la lecture d'un article de H. S. Wilf, relatif à un procédé d'intégration des fonctions numériques. L'idée de Wilf a été également reprise par plusieurs auteurs, en particulier R. E. Barnhill, pour des espaces de fonctions analytiques.

I. APPROXIMATION OPTIMALE D'UNE FONCTIONNELLE

On désigne par $C^0_{[0,1]}$ l'espace des fonctions définies et continues sur [0, 1], à valeurs dans $\mathbf{R}$, normé par $\|f\|_{C^0_{[0,1]}} = \operatorname{Max}_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

Soit H un espace de Hilbert réel, dont les éléments sont dans $C^0_{[0,1]}$, et tel que l'injection canonique de H dans $C^0_{[0,1]}$ soit continue. Soit H' son dual topologique. On notera $(u, v)_H$ (respectivement $(u, v)_{H'}$) le produit scalaire dans H (respectivement dans H'). La dualité entre H et H' sera notée $\langle\cdot, \cdot\rangle$. Λ désignera l'isomorphisme canonique de H dans H'.

Dans ces conditions on peut considérer les fonctionnelles d'évaluation sur H:

$$\delta_\alpha\colon \varphi \in H \to \langle\delta_\alpha , \varphi\rangle = \varphi(\alpha) \qquad \text{où} \qquad \alpha \in [0, 1].$$

$\delta_\alpha \in H'$. Si $g_\alpha = \Lambda^{-1}(\delta_\alpha)$, on a $(g_\alpha , g_\beta)_H = (\delta_\alpha , \delta_\beta)_{H'} = \langle\delta_\alpha , g_\beta\rangle = \langle\delta_\beta , g_\alpha\rangle$. On posera $g(\alpha, \beta) = (g_\alpha , g_\beta)_H$.

La fonction $g(\alpha, \beta)$, définie sur $[0, 1] \times [0, 1]$ qui appartient à H en tant que fonction de l'un quelconque de ses arguments, est le noyau reproduisant de l'espace H. Nous faisons l'hypothèse suivante sur le noyau reproduisant de H:

$$(\mathscr{H}_1) \qquad \begin{aligned} g(\alpha, \beta) &= a(\alpha)\, b(\beta) \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1 \\ &= a(\beta)\, b(\alpha) \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant 1 \end{aligned}$$

où a et b sont deux fonctions connues, appartenant à H. Nous dirons que *g est de forme triangulaire*.

Soit $l \in H'$. On pose

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_N), \qquad & x_i &\in [0, 1] \quad i = 1, 2, \ldots, N, \\ A &= (A_1, A_2, \ldots, A_N), \qquad & A_i &\in \mathbf{R} \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

Le problème qui nous intéresse est le suivant:

$l \in H'$ étant donné, existe-il (x^*, A^*) dans $[0, 1]^N \times \mathbf{R}^N$ tel que

$$\Psi^2(l; x^*, A^*) = \min_{(x,A) \in [0,1]^N \times \mathbf{R}^N} \Psi^2(l; x, A) \quad \text{où}$$

$$\Psi^2(l; x, A) = \Big\| l - \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} A_i \delta_{x_i} \Big\|_{H'}^2 ?$$

Si un tel jeu de *poids* A_i^* et de *nœuds* x_i^* ($i = 1, 2, \ldots, N$) existe, nous dirons que parmi les approximations de la fonctionnelle l, de la forme

$$\bar{l} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} A_i \delta_{x_i}, \qquad \bar{l}^* = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} A_i^* \delta_{x_i^*}$$

est une *approximation optimale*. Cette définition est donc tout-à-fait analogue à celle des formules optimales au sens de Sard [11], mais avec l'introduction de *nœuds variables* dans $[0, 1]$.

II. Étude de Ψ^2 $(l; x, A)$

Posons $\Phi^2(l; x) = \min_{A \in \mathbf{R}^N} \Psi^2(l; x, A)$. Il s'agit bien d'un minimum, car lorsque A varie dans $\mathbf{R}^N$, trouver le minimum de $\Psi^2(l; x, A)$ pour x fixé, revient à projeter orthogonalement l sur la variété engendrée par les δ_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, N$. Nous utiliserons la propriété suivante dont la démonstration est élémentaire.

LEMME 1.
$$\inf_{x\in[0,1]^N} \Phi^2(l; x) = \inf_{(x,A)\in[0,1]^N\times\mathbf{R}^N} \Psi^2(l; x, A).$$

Nous sommes ainsi ramenés à l'étude de $\Phi^2(l; x)$ lorsque x appartient au compact $[0, 1]^N$. *Pour obtenir une condition suffisante d'existence de x^*, il suffit de trouver une condition suffisante de continuité de l'application*

$$x \in [0, 1]^N \to \Phi^2(l; x) \in \mathbf{R}.$$

Calcul explicite de $\Phi^2(l; x)$

La quantité $\Phi^2(l; x)$ représente le carré de la distance de l, à la variété linéaire V_x, engendrée dans H', par les fonctionnelles $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_N}$. On peut toujours exhiber un jeu d'abscisses $t_1, t_2, \ldots, t_p$ tel que

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant p \leqslant N,\\
&0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_p \leqslant 1 \quad t_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \quad i = 1, 2, \ldots, p,\\
&\delta_{t_1}, \delta_{t_2}, \ldots, \delta_{t_p} \quad \text{linéairement indépendants et engendrent } V_x\\
&\qquad\qquad \text{(c'est-à-dire } V_x = V_t).
\end{aligned}$$

On a alors:

LEMME 2. *$\Phi^2(l; x) = (l, l)_{H'} - \tilde{l}^t G^{-1} \tilde{l}$ où $\tilde{l}^t = (\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \ldots, \tilde{l}_p) \in \mathbf{R}^p$ avec $\tilde{l}_i = (l, \delta_{t_i})_{H'}$, $i = 1, 2, \ldots, p$ et $G = ((\delta_{t_i}, \delta_{t_j})_{H'}) = (g(t_i, t_j))$ (matrice de Gramm des δ_{t_i}, $i = 1, 2, \ldots, p$).*

La démonstration est immédiate en remarquant que la quantité $\tilde{l}^t G^{-1} \tilde{l}$ représente le carré scalaire de la projection orthogonale de l sur la variété engendrée dans H' par les p éléments $\delta_{t_1}, \delta_{t_2}, \ldots, \delta_{t_p}$ c'est-à-dire sur la variété V_x.

LEMME 3. *Si le noyau reproduisant de H est de forme triangulaire, alors G^{-1} est tridiagonale et on a explicitement*

$$G^{-1} = \begin{bmatrix}
\alpha_1 & \beta_1 & & & 0\\
\beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & \beta_{p-1}\\
0 & & & \beta_{p-1} & \alpha_p
\end{bmatrix}$$

avec

$$\beta_i = \frac{1}{a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, p-1$$

$$\alpha_1 = \frac{a_2}{a_1(a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

$$\alpha_i = \frac{a_{i+1} b_{i-1} - a_i b_{i+1}}{(a_{i-1} b_i - a_i b_{i-1})(a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i)} \qquad i = 2, 3, \ldots, p-1$$

$$\alpha_p = -\frac{b_{p-1}}{b_p(a_{p-1} b_p - a_p b_{p-1})}$$

où

$$\begin{aligned} a_i &= a(t_i) \\ b_i &= b(t_i) \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \ldots, p$$

a et b étant les deux facteurs de décomposition du noyau g.

Démonstration (cf. [4]). Posons

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_p \end{pmatrix} \qquad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système $\delta_{t_1}, \delta_{t_2}, \ldots, \delta_{t_p}$ est un système de p vecteurs indépendants dans H'. Donc en particulier $\delta_{t_i} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$ ce qui est équivalent à $(\delta_{t_i}, \delta_{t_i})_{H'} \neq 0$, soit $g(t_i, t_i) = a(t_i)\, b(t_i) \neq 0$, soit encore $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Par conséquent D^{-1} existe et on obtient

$$L^{t^{-1}} D^{-1} G D^{-1} L^{-1} = \Lambda = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 & & & & 0 \\ & v_2 - v_3 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & v_{p-1} - v_p & \\ & & & & v_p \end{pmatrix}$$

où $v_i = b_i / a_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

La matrice G étant par nature (c'est un grammien) définie positive, il en est de même de la matrice Λ et on a

$$G^{-1} = D^{-1} L^{-1} \Lambda^{-1} L^{t^{-1}} D^{-1},$$

ce qui conduit en explicitant ce produit, au résultat annoncé. On a alors:

THÉORÈME I.

$$\Phi^2(l; x) = (l, l)_{H'} - \left[\sum_{i=1}^{p-1} \frac{(k_i - k_{i+1})^2}{v_i - v_{i+1}} + \frac{k_p{}^2}{v_p}\right] \quad \text{où} \quad k_i = \frac{\tilde{l}_i}{a_i}$$

$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

Il suffit en effet d'expliciter la forme quadratique $\tilde{l}^t G^{-1} \tilde{l}$ (lemme 2) en utilisant l'expression de G^{-1} (lemme 3).

III. CONTINUITÉ DE L'APPLICATION $x \in [0, 1]^N \to \Phi^2(l; x) \in \mathbf{R}$

Remarque préliminaire

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in [0, 1]^N$. On lui associe $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in \mathbf{R}^p$ en prenant

$t_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \qquad i = 1, 2, \ldots, p,$

$\delta_{t_1}, \delta_{t_2}, \ldots, \delta_{t_p}$ sont linéairement indépendants dans H',

$V_x = V_t$

où rappelons le V_x est la variété engendrée dans H' par $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_N}$. Dans ces conditions on peut rencontrer les cas de figures suivants:

(A) Les abscisses $t_1, t_2, \ldots, t_p$ qui sont nécessairement toutes distinctes sont telles que: $\forall_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$, $\exists_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $x_j = t_i$.

(B) Le cas (A) n'est pas vérifié pour tout $x \in [0, 1]^N$. Autrement dit il peut exister un indice j_0, $1 \leqslant j_0 \leqslant N$ tel que $x_{j_0} \neq t_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Mais comme $\delta_{x_{j_0}}, \delta_{t_1}, \ldots, \delta_{t_p}$ sont alors nécessairement linéairement dépendants, nous avons

$$\text{soit} \quad \delta_{x_{j_0}} = 0$$

$$\text{soit} \quad \delta_{x_{j_0}} \neq 0 \qquad \text{mais} \quad \delta_{x_{j_0}} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{(j_0)} \delta_{t_i}.$$

Le cas (B) est une source d'énormes difficultés dans l'étude de la continuité de la fonction $\Phi^2(l; x)$. Aussi nous ferons l'hypothèse simplificataire

($\mathscr{H}_2$) L'espace considéré H est tel que quel que soit l'entier $K \geqslant 1$ on a l'équivalence suivante:
$x_1, x_2, \ldots, x_K$ abscisses distinctes dans $[0, 1] \rightleftarrows \delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_K}$ linéairement indépendants dans H'.

Autrement dit nous excluons l'éventualité (B) ci-dessus. Nous sommes alors en mesure d'étudier la fonction $x \to \Phi^2(l, x)$.

LEMME 4. *Si les hypothèses* ($\mathscr{H}_1$) *et* ($\mathscr{H}_2$) *sont satisfaites, les fonctions* $v(x) = b(x)/a(x)$ *et* $k(x) = (l, \delta_x)_{H'}/a(x)$ *sont définies et continues sur* $[0, 1]$. *De plus* v *est strictement monotone décroissante sur cet intervalle.*

Démonstration. Quel que soit x dans $[0, 1]$ on a $\delta_x \neq 0$ (hypothèse $\mathscr{H}_2$), donc $\| \delta_x \|_{H'}^2 = a(x)\, b(x) \neq 0$. $a(x)$ ne s'annule donc jamais sur l'intervalle $[0, 1]$ et les fonctions v et k sont toujours définies.

D'autre part $H \subset C^0_{[0,1]}$, donc $a, b \in C^0_{[0,1]}$ et par conséquent v est continue sur $[0, 1]$. Soit $x < y$, $x, y \in [0, 1]$. L'hypothèse $\mathscr{H}_2$ étant satisfaite, δ_x et δ_y sont linéairement indépendants, et en reprenant la démonstration du lemme 3 avec $\{t_1, t_2, ..., t_p\} = \{x, y\}$ on obtient $v(x) - v(y) > 0$. Donc v est strictement monotone décroissante sur $[0, 1]$. Enfin

$$k(x) = \frac{(l, \delta_x)_{H'}}{a(x)} = \frac{h(x)}{a(x)} \qquad \text{si} \quad h = \Lambda^{-1}(l)$$

où $h \in H$ donc $h \in C^0_{[0,1]}$, ce qui prouve que $k \in C^0_{[0,1]}$.

Nous avons alors le résultat essentiel suivant:

THÉORÈME II. *Si* H *vérifie les hypothèses* ($\mathscr{H}_1$) *et* ($\mathscr{H}_2$), *une condition nécessaire et suffisante pour que l'application* $x \to \Phi^2(l; x)$ *soit continue sur* $[0, 1]^N$ *et que l'on ait*

$$\lim_{\alpha,\beta} \frac{[k(\alpha) - k(\beta)]^2}{v(\alpha) - v(\beta)} = 0$$

quel que soit $\gamma \in [0, 1]$, *limite commune de* α *et* β ($\alpha \neq \beta$).

Démonstration. Soit $x \in [0, 1]^N$, $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$. Soient $t_1 < t_2 < \cdots < t_p$ les abscisses distinctes de x. Puisque l'hypothèse ($\mathscr{H}_2$) est satisfaite $\delta_{t_1}, \delta_{t_2}, ..., \delta_{t_p}$ sont linéairement indépendants et engendrent la même variété que $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, ..., \delta_{x_N}$. D'après le théorème I nous avons

$$\Phi^2(l; x) = (l, l)_{H'} - \left[\sum_{i=1}^{p-1} \frac{[k(t_i) - k(t_{i+1})]^2}{v(t_i) - v(t_{i+1})} + \frac{k^2(t_p)}{v(t_p)}\right].$$

Soit $\{x^{(s)}\}$ une suite de $[0, 1]^N$ admettant x comme limite lorsque s tend vers l'infini. Posons $d = \min(t_2 - t_1, t_3 - t_2, ..., t_p - t_{p-1})$ si $p > 1$. (Le cas $p = 1$ n'est pas retenu, mais la démonstration permettra de conclure aisément même dans ce cas.) On a $d > 0$. Puisque $\lim_{s\to\infty} x^{(s)} = x$, il existe un rang S tel que

$$s \geqslant S \Rightarrow \| x^{(s)} - x \|_\infty \leqslant \frac{d}{3}.$$

Cela signifie que pour $s \geqslant S$, les composantes $x_i^{(s)}$, $i = 1, 2, ..., N$ de $x^{(s)}$ sont disposées dans p intervalles disjoints, centrés sur les t_i, $i = 1, 2, ..., p$, et ne dépendant pas de s.

Soit

$$I_r = \left\{ i, 1 \leqslant i \leqslant N : | x_i^{(s)} - t_r | \leqslant \frac{d}{3} \right\} \qquad \text{pour} \quad s \geqslant S \qquad r = 1, 2, \ldots, p$$

On a

$$I_r \neq \varnothing \qquad r = 1, 2, \ldots, p \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{r=1}^{p} I_r = \{1, 2, \ldots, N\}$$

$$I_k \cap I_{k'} = \varnothing \qquad \text{si} \quad k \neq k'.$$

Pour calculer $\Phi^2(l; x^{(s)})$, $s \geqslant S$, nous ne devons considérer que les abscisses distinctes de $x^{(s)}$, et les ordonner. Cette opération peut être faite séparément dans chacun des p groupements d'abscisses. Nous mettons ainsi en évidence les suites d'abscisses

$$\{\lambda_r^{(s)}\}, \quad \{\mu_r^{(s)}\}, \qquad s = S, S+1, \ldots$$

définies par

$$\lambda_r^{(s)} = x_i^{(s)} \qquad \text{avec} \quad i \in I_r \qquad x_i^{(s)} \leqslant x_j^{(s)} \qquad \forall j \in I_r$$

$$\mu_r^{(s)} = x_i^{(s)} \qquad \text{avec} \quad i \in I_r \qquad x_j^{(s)} \leqslant x_i^{(s)} \qquad \forall j \in I_r$$

et nous avons (cf. Théorème I) pour $s \geqslant S$,

$$\Phi^2(l; x^{(s)}) = (l, l)_{H'} - [M^{(s)} + N^{(s)}]$$

avec

$$M^{(s)} = \sum_{r=1}^{p-1} \frac{[k(\mu_r^{(s)}) - k(\lambda_{r+1}^{(s)})]^2}{v(\mu_r^{(s)}) - v(\lambda_{r+1}^{(s)})} + \frac{k^2(\mu_p^{(s)})}{v(\mu_p^{(s)})}$$

et où $N^{(s)}$ est une somme finie, éventuellement vide, de termes non négatifs (cf. lemme 4), de la forme $[k(\alpha) - k(\beta)]^2/[v(\alpha) - v(\beta)]$ où $\alpha < \beta$, α et β étant deux abscisses consécutives de l'ensemble des abscisses distinctes de $x^{(s)}$, α et β appartenant toutes deux à l'un des intervalles $V_r = \{x \in [0, 1] : | x - t_r | \leqslant d/3\}$, $r = 1, 2, \ldots, p$; mis en évidence précédemment.

Or par définition de $\{\lambda_r^{(s)}\}$ et $\{\mu_r^{(s)}\}$ on a

$$\lim_{s \to \infty} \lambda_r^{(s)} = \lim_{s \to \infty} \mu_r^{(s)} = t_r, \qquad r = 1, 2, \ldots, p,$$

k et v étant continue sur [0, 1], la quantité $(l, l)_{H'} - M^{(s)}$ tend lorsque s tend vers l'infini, vers

$$(l, l)_{H'} - \sum_{r=1}^{p-1} \frac{[k(t_r) - k(t_{r+1})]^2}{v(t_r) - v(t_{r+1})} + \frac{k^2(t_p)}{v(t_p)} = \Phi^2(l; x).$$

Une condition suffisante pour que $\lim_{s\to\infty} \Phi^2(l, x^{(s)}) = \Phi^2(l; x)$ est donc que $\lim_{s\to\infty} N^{(s)} = 0$, ce qui est vérifié si tous les termes (s'il en existe) du type $[k(\alpha) - k(\beta)]^2/[v(\alpha) - v(\beta)]$ tendent vers zéro lorsque α et β tendent vers t_k, $1 \leqslant k \leqslant p$. Comme il est toujours possible de faire tendre $x^{(s)}$ vers x lorsque s tend vers l'infini, de façon à ce que nous ayons de tels termes dans $N^{(s)}$, la condition est également nécessaire.

Enfin, cette condition devant être vérifiée quel que soit x appartenant à $[0, 1]^N$, nous obtenons la condition nécessaire et suffisante annoncée:

$$\lim_{\substack{\alpha,\beta\to\gamma \\ \alpha\neq\beta}} \frac{[k(\alpha) - k(\beta)]^2}{[v(\alpha) - v(\beta)]} = 0 \qquad \forall\gamma \in [0, 1].$$

COROLLAIRE. *Si a et b, facteurs de décomposition du noyau reproduisant g, sont dérivables, et si* $v' = (b/a)'$ *ne s'annule pas sur* $[0, 1]$ *alors une condition nécessaire et suffisante de continuité de* $\Phi^2(l; x)$ *sur* $[0, 1]^N$ *est*

$$\lim_{\substack{\alpha,\beta\to\gamma \\ \alpha\neq\beta}} \frac{[h(\alpha) - h(\beta)]^2}{\alpha - \beta} = 0 \qquad \forall\gamma \in [0, 1] \qquad \text{où} \qquad h = \Lambda^{-1}(l).$$

Démonstration. Puisque $k(x) = \langle \Lambda^{-1}(l), \delta_x \rangle / a(x) = h(x)/a(x)$ on a puisque v' existe

$$\frac{[k(\alpha) - k(\beta)]^2}{v(\alpha) - v(\beta)} = \frac{[(h(\alpha) - h(\beta))/a(\alpha) + h(\beta)[a(\beta) - a(\alpha)]/(a(\alpha)\, a(\beta))]^2}{(\alpha - \beta)\, v'(c)}$$

avec $\alpha \leqslant c \leqslant \beta$. En développant on obtient les termes

$*$ $[h(\alpha) - h(\beta)]^2/[a^2(\alpha)\, v'(c)(\alpha - \beta)]$ qui est équivalent à $1/(a^2(\gamma)\, v'(\gamma))$ $[h(\alpha) - h(\beta)]^2/(\alpha - \beta)$ lorsque $\alpha, \beta \to \gamma$.

$*$ $2[h(\alpha) - h(\beta)]\, h(\beta)[a(\beta) - a(\alpha)]/(\alpha - \beta) * 1/(a^2(\alpha)\, a(\beta))$ qui tend vers 0 lorsque $\alpha, \beta \to \gamma$ (a' existe et h est continue).

$*$ $h^2(\beta)/(a^2(\alpha)\, a^2(\beta))[a(\alpha) - a(\beta)]/(\alpha - \beta) * [a(\alpha) - a(\beta)]$ qui tend vers 0 lorsque $\alpha, \beta \to \gamma$ (a' existe).

La condition de continuité se réduit donc à

$$\lim_{\substack{\alpha,\beta\to\gamma \\ \alpha\neq\beta}} \frac{[h(\alpha) - h(\beta)]^2}{\alpha - \beta} = 0 \qquad \forall\gamma \in [0, 1].$$

Ce corollaire est important dans la mesure où il ne fait intervenir que le représentant h dans H, de la fonctionnelle l.

En particulier si $h = \Lambda^{-1}(l)$ est telle que $| h(\alpha) - h(\beta)| \leqslant M \mid \alpha - \beta \mid$ quels que soient α, β appartenant à $[0, 1]$, la condition est satisfaite (M constante positive ne dépendant que de h).

IV. Applications, Exemples

On considère l'espace classique de Sobolev $H = W^2_{1(0,1)}$

$$H = \{\varphi\colon \varphi, \varphi' \in L^2_{(0,1)}\ ; (\varphi, \Psi)_H = (\varphi, \Psi)_{L^2_{(0,1)}} + (\varphi', \Psi')_{L^2_{(0,1)}}\}$$

les dérivées étant prises au sens des distributions. On sait que H est un espace de Hilbert qui s'injecte continuement dans $C^0_{[0,1]}$. On peut expliciter aisément son noyau (cf. [9]) et l'on a:

$$g(x, \alpha) = \frac{ch x\, ch(1-\alpha)}{sh 1} \qquad \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \alpha \leqslant 1$$

$$= \frac{ch\alpha\, ch(1-x)}{sh 1} \qquad \text{si} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant x \leqslant 1.$$

Sur H, les hypothèses $(\mathscr{H}_1)$ et $(\mathscr{H}_2)$ sont vérifiées (voir en particulier [10]). On prendra

$$a(x) = chx,$$

$$b(x) = \frac{ch(1-x)}{sh 1},$$

a et b sont dérivables sur $[0, 1]$.

La fonction $v(x) = b(x)/a(x)$ est dérivable et $v'(x) = -1/ch^2(x) \neq 0$ $\forall x \in [0, 1]$. Nous sommes donc dans les conditions d'application du corollaire du théorème II. La fonction $x \to \Phi^2(l; x)$ est continue sur $[0, 1]^N$ *si et seulement si* $\lim_{\alpha,\beta\to\gamma,\alpha\neq\beta}[h(\alpha) - h(\beta)]^2/(\alpha-\beta) = 0$, $\forall\gamma \in [0, 1]$. Le théorème suivant montre que cette condition est réalisée pour une large classe de fonctionnelles sur H.

Théorème III. *Toute fonctionnelle linéaire sur H du type*

$$l_z\colon \varphi \in H \to l_z(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)\, z(t)\, dt \qquad \text{où} \quad z \in L^2_{(0,1)}$$

est linéaire continue sur $H(l_z \in H')$ et si $h_z = \Lambda^{-1}(l_z)$ il existe une constante positive M_z ne dépendant que de z, telle que

$$|h_z(\alpha) - h_z(\beta)| \leqslant M_z\,|\alpha - \beta| \qquad \forall\alpha \in [0, 1]$$
$$\forall\beta \in [0, 1].$$

Démonstration. (1)

$$|l_z(\varphi)|^2 = \left[\int_0^1 \varphi(t)\, z(t)\, dt\right]^2 \leqslant \|z\|^2_{L^2_{(0,1)}} \times \|\varphi\|^2_{L^2_{(0,1)}}$$

(inégalité de Schwartz dans $L^2_{(0,1)}$). Mais

$$\| \varphi \|_{L^2_{(0,1)}} \leqslant \| \varphi \|_H \qquad \text{d'où} \quad | l_z(\varphi)|^2 \leqslant \| z \|^2_{L^2_{(0,1)}} \times \| \varphi \|^2_H ,$$

ce qui prouve que l_z est continue sur H.

(2) Considérons le rapport $(g(\alpha, x) - g(\beta, x))/(\alpha - \beta)$, $\alpha \neq \beta$. D'après la forme élémentaire de la fonction $g(u, v)$ qui est dérivable en u (pour v fixé) sauf pour $u = v$, il est aisé d'exhiber une constante positive C, telle que pour $\alpha \neq \beta$

$$\left| \frac{g(\alpha, x) - g(\beta, x)}{\alpha - \beta} \right| < C \qquad \text{quel que soit } x \text{ dans } [0, 1].$$

Or $h_z(x) = (l_z , \delta_x)_{H'} = \langle l_z , \Lambda^{-1}(\delta_x) \rangle = \int_0^1 g(x, u)\, z(u)\, du$. Donc

$$\left| \frac{h_z(\alpha) - h_z(\beta)}{\alpha - \beta} \right| = \left| \int_0^1 \frac{g(\alpha, n) - g(\beta, u)}{\alpha - \beta} z(u)\, du \right| \leqslant C \int_0^1 | z(u)|\, du.$$

Puisque $z \in L^2_{(0,1)}$, $\int_0^1 | z(u)|\, du$ existe, et en posant $M_z = C \int_0^1 | z(u)|\, du$, nous obtenons le résultat annoncé

$$| h_z(\alpha) - h_z(\beta)| \leqslant M_z \,| \alpha - \beta | \qquad \begin{array}{l} \forall \alpha \in [0, 1] \\ \forall \beta \in [0, 1]. \end{array}$$

En conséquence

$$\frac{[h_z(\alpha) - h_z(\beta)]^2}{| \alpha - \beta |} = \left| \frac{h_z(\alpha) - h_z(\beta)}{\alpha - \beta} \right|^2 | \alpha - \beta | \leqslant M_z{}^2 \,| \alpha - \beta |$$

et on a

$$\lim_{\substack{\alpha,\beta \to \gamma \\ \alpha \neq \beta}} \frac{[h_z(\alpha) - h_z(\beta)]^2}{\alpha - \beta} = 0 \qquad \forall \gamma \in [0, 1].$$

Ceci prouve (corollaire du théorème II) que la fonction $x \to \Phi^2(l_z\, ; x)$ *est continue sur* $[0, 1]^N$ *quel que soit* $z \in L^2_{(0,1)}$.

EXEMPLE 1. $z(x) = 1$, $\forall x \in [0, 1]$. La fonctionnelle étudiée est la fonctionnelle intégrale i: $\varphi \to \int_0^1 \varphi(t)\, dt$. D'après ce qui précède nous pouvons donc affirmer que parmi les approximations du type $\int_0^1 \varphi(t)\, dt \simeq \sum_{i=1}^N A_i \varphi(x_i)$, il en existe une au moins pour laquelle la fonctionnelle erreur e

$$e(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)\, dt - \sum_{i=1}^N A_i \varphi(x_i)$$

est de norme minimale dans H'.

Nous avons montré dans [7], que cette approximation optimale était *unique*, et nous avons complètement explicité les nœuds x_i^* et les poids A_i^* correspondants ($i = 1, 2, \ldots, N$).

EXEMPLE 2. $z(x) = \mathrm{Log}(x)$, $x \in]0, 1]$. Dans ce cas la portée du théorème 3 est encore plus manifeste. La fonctionnelle sur H

$$\varphi \to \int_0^1 \varphi(t)\, \mathrm{Log}(t)\, dt$$

admet au moins une approximation optimale. Cependant, nous n'avons pu démontrer l'unicité dans un tel cas. D'autre part, la détermination d'un jeu optimal d'abscisses et de poids, reste à l'étude.

V. CARACTÉRISATION D'UN JEU OPTIMAL DE NOEUDS $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$ LORSQU'IL EXISTE

Nous donnons ici sans démonstration deux résultats, de nature très intuitive d'ailleurs. Cf. [9].

(a) Dans une formule d'approximation optimale, le nombre de nœuds distincts est égal à N si et seulement si la fonctionnelle étudiée, n'est pas combinaison linéaire de p fonctionnelles d'évaluation linéairement indépendantes $0 \leqslant p \leqslant N - 1$.

(b) Les nœuds optimaux x_i^*, $i = 1, 2, \ldots, N$ appartiennent nécessairement au support de la fonctionnelle étudiée l.

En conclusion nous ferons les remarques suivantes:

(1) Les résultats du paragraphe III précédent, peuvent être généralisés lorsqu'on prend pour H, un espace de type $W_1^2(0, 1)$, mais où le produit scalaire est obtenu en pondérant convenablement la fonction et sa dérivée

$$(\varphi, \Psi) = \int_0^1 p\varphi'\Psi' + q\varphi\Psi.$$

(2) Des résultats du même type peuvent être donnés, pour des espaces de fonctions s'annulant aux bords, ou même en certains points de [0, 1].

(3) Quelques propriétés de portée plus générale sur l'approximation d'une fonctionnelle par une famille de fonctionnelles dépendant d'un paramètre ont été étudiées dans [8].

ANNEXE (April, 1972)

Relativement au problème de l'existence d'une meilleure approximation d'une fonctionnelle linéaire continue sur H, par des fonctionnelles ponctuelles (H espace de Sobolev de type $H^1_{(0,1)}$) nous avions formulé le résultat suivant.

THÉORÈME 1. *Une condition suffisante pour que $l \in H'$ admette une meilleure approximation du type $\sum_{i=1}^{N} A_i \delta_{x_i}$ est que*

$$\forall \gamma \in [0, 1]\colon \lim_{\substack{\alpha,\beta \to \gamma \\ \alpha \neq \beta}} \frac{[h(\alpha) - h(\beta)]^2}{\alpha - \beta} = 0.$$

Où $h = \Lambda^{-1}(l)$ est le représentant dans H de la fonctionnelle l.

Nous sommes en mesure de compléter ce résultat par le théorème.

THÉORÈME 2. *Si H est une espace de Sobolev (de type $H^1_{(0,1)}$) alors $\forall N$, $\forall l \in H'$, $\exists x_i{}^*$, $A_i{}^*$, $i = 1, 2,\ldots, N$ tels que*

$$\left\| l - \sum_{1}^{N} A_i{}^* \delta x_i{}^* \right\|_{H'} = \min_{\substack{x_i \in [0,1] \\ A_i \in \mathbf{R}}} \left\| l - \sum A_i \delta_{x_i} \right\|_{H'}.$$

La démonstration est triviale en remarquant que la condition suffisante du théorème 1 est toujours satisfaite.

En effet, si $h \in H$, alors on peut établir par une argumentation classique en théorie des distributions que

$$h(x) = \int_0^x h'(u)\, du + h(0) \qquad (h' \text{ dérivée distribution de } h).$$

Dans ces conditions

$$[h(\alpha) - h(\beta)]^2 = \left(\int_\alpha^\beta h'(u)\, du\right)^2 \leqslant (\beta - \alpha) \int_\alpha^\beta h'^2(u)\, du$$

(inégalité de Schwartz) et donc

$$\frac{[h(\beta) - h(\alpha)]^2}{[\beta - \alpha]} \leqslant \int_\alpha^\beta h'^2(u)\, du \xrightarrow[\alpha,\beta \to \gamma]{} 0 \qquad \forall \gamma \in [0, 1]$$

puisque $h' \in L^2_{(0,1)}$.

En résumé. Dans $H^1_{(0,1)}$ (et les espaces du même type) la formule d'approximation optimale existe toujours, quelle que soit le fonctionnelle linéaire continue considérée.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. BARANGER, Approximation optimale de la somme d'une série, *C.R.A.S.* série A, **271** (1970), 149-152.
2. J. BARANGER, Un théorème de caractérisation de certains sous-espaces hilbertiens de l_1, *AFCET Brèves Communications* **3** (1970), 131-134.
3. J. BARANGER, Existence d'une approximation optimale pour les fonctionnelles sur des espaces de suites de type H^1, *C.R.A.S.* t. 272 (Mars 1971) Série A; pp. 676-679.
4. J. BARANGER ET M. DUC-JACQUET, Matrices tridiagonales symétriques et matrices factorisables *A.F.C.E.T. Brèves Communications RIRO* (1971), a paraître.
5. R. E. BARNHILL AND J. A. WIXON, Quadratures with remainders of minimum norm. I, *Math. Comp.* **21** (1967), 97, *R.I.R.O.* 5ème année, No. R-3, 1971, pp. 61-66.
6. R. E. BARNHILL, Quadratures with remainders of minimum norm. II, *Math. Comp.* **21** (1967), 99.
7. M. DUC-JACQUET, Meilleures formules d'intégration dans certains espaces de Hilbert de fonctions, *C.R.A.S.* série A, **271** (1970), 795-797.
8. M. DUC-JACQUET, Sur l'approximation d'une fonctionnelle par des fonctionnelles qui dépendent d'un paramètre, dans des espaces de Hilbert, *C.R.A.S.* série A, **272** (1971), 469-472.
9. M. DUC-JACQUET, Espaces hilbertiens à noyau reproduisant factorisable et approximation de fonctionnelles sur ces espaces, "Séminaire d'Analyse Numérique," Grenoble, 2ème semestre 1970-71.
10. J. L. LIONS, Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, "Séminaire Université de Montréal," été 1962.
11. A. SARD, Best approximate integration formulas; Best approximation formulas, *Amer. J. Math.* **71** (1949), 80-91.
12. S. L. SOBOLEV, Les équations aux dérivées partielles, "Colloques internationaux du CNRS, Paris, 1962.
13. H. S. WILF, Exactness conditions in numerical quadratures, *Num. Math.* **6** (1964), 315-319.